Έστω X με γνωστή κατανομή. Ζητείται κατανομή $Y=g(x)$

Γ Μέθοδος Ροπογεννήτριας

Η ροπογεννήτρια της τ.μ $Y=g(x)$ είναι

$$m_Y(t) \overset{op}{=} E(e^{tY}) = E(e^{tg(x)}) = \begin{cases} \sum_x e^{tg(x)} f_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tg(x)} f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Αν $m_Y(t)$ μπορεί να υπολογιστεί και έχει τη μορφή της ροπογεννήτριας κάποιας ειδικής κατανομής τότε από το θεώρημα μονοσημάντου των ροπογεννητριών η κατανομή της Y ταυτίζεται με την κατανομή της ειδικής κατανομής.

Παράδειγμα.

Έστω τ.μ. X με κατανομή Pareto $f_X(x) = \vartheta x^{-\vartheta-1}$, $x>1, \vartheta>0$

Να βρεθεί η κατανομή $y=\log x$

Λύση

$$m_Y(t) \overset{op}{=} E(e^{tY}) = E(e^{t\log x}) = E(e^{\log x^t}) = E(x^t) \overset{op}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^t f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^t \vartheta x^{-\vartheta-1}\,dx = \vartheta \int_1^{+\infty} x^{t-\vartheta-1}\,dx =$$

$$= \vartheta\left[\frac{x^{t-\vartheta}}{t-\vartheta}\right]_1^{+\infty} \overset{t<\vartheta}{=} \vartheta\left(0-\frac{1}{t-\vartheta}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta-t}$$

Αν $W \sim Εκθ(\lambda)$ τότε $m_W(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$

Επειδή η ροπογεννήτρια της Y έχει ίδια μορφή με τη ροπογεν της εκθετικής κατανομής από το θεώρημα του μονοσήμαντου των ροπογεννητριών $Y \sim Εκθ(\theta)$

Παράδειγμα

Έστω τ.μ X με κατανομή Gumbel με α.σ.κ

$$F_X(x) = \exp\left\{-e^{-\frac{x-a}{b}}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ b>0$$

Να βρεθεί η τ.μ $\quad Y = e^{-\frac{x-a}{b}}$

1) Μέθοδος α.σ.κ

$$F_Y \overset{op}{=} P(Y \le y) = P\left(e^{-\frac{x-a}{b}} \le y\right) = P(X \ge a - b\log y) =$$
$$= 1 - P(X \le a - b\log y) = 1 - F_X(a - b\log y) = 1 - e^{-y}, \quad y>0$$

Αν $W \sim ΕκθΑ$ τότε $F_W(w) = \begin{cases} 1 - e^{-w}, & w>0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$

2) Μέθοδος του μετασχηματισμού

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y = g(x) = e^{-\frac{x-a}{b}}$

$x \in \mathbb{R} = I \qquad y > 0 \qquad g(I) = (0, +\infty)$

(i) Ο g είναι 1-1
$x = g^{-1}(y) = a - b\log y$

(ii) $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -\frac{b}{y}$ συνεχής συνάρτηση και $\frac{d}{dy} g^{-1}(x) \neq 0$

②

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \ *$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(y) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x-a}{\beta}} \cdot e^{e^{\frac{-x-a}{\beta}}} \quad , x \in R$$

Άρα $* \ f_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0$

Αν $\omega \sim Εκθ(λ)$ $\quad f_\omega(\omega) = \begin{cases} λ e^{-λ\omega} & , \omega > 0 \\ 0 & , \omega \le 0 \end{cases}$ $\quad Y \sim Εκθ(1)$

3) <u>Μέθοδος Ροπογεννήτρια</u>

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{te^{-\frac{x-a}{\beta}}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{te^{-\frac{x-a}{\beta}}} f_X(x)\,dx =$$

$$= \ldots = \frac{1}{1-t} \quad t < 1$$

← Μορφή ροπογεννήτριας

$Εκθ(1)$ Άρα $Y \sim Εκθ(1)$

Άρα σε συνεχή περίπτωση υπάρχουν 3 μέθοδοι για αλλαγή μεταβλητής.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1) τ.μ. με $f_X(x) = \begin{cases} a(1-x^2) & , -1 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

α. $a=?$, $F_X=?$

β. $P(X>0)=?$ $\quad P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})=?$

$P(X>-\frac{1}{2} / X<\frac{1}{2})=?$

γ. $E(X)=?$

Λύση

α. $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} a(1-x^2)\,dx = a\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = a\left[[x]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\right]$

$\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 \quad , \quad x<-1$

$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} \quad , \quad -1\le x\le 1$

$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 1 \quad , \quad x>1$

Άρα $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} & , -1 \le x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$

β. $P(X>0) = \int_0^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}$

$P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{16}$

$P(X > -\frac{1}{2} / X < \frac{1}{2}) = \dfrac{P(X>-\frac{1}{2} \text{ κ' } X<\frac{1}{2})}{P(X<\frac{1}{2})}$

$P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})}{P(X<\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{11}{16}}{F_X(\frac{1}{2})} = \dfrac{22}{27}$

Τα A, B ανεξάρτητα αν $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cap B) = P(X>0 \text{ κ' } -\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}) = P(0<X\le\frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(0) = \frac{11}{32}$

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{11}{16}$

Παρατηρώ ότι $P(A\cap B) = \frac{11}{32}$ και $P(A)\cdot P(B) = \frac{11}{32}$ άρα ανεξάρτητα

γ. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = 0$

(Αν μου ζητούσε και την διακύμανση καλύτερα να χρησιμοποιώ τον τύπο $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$ με $E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f_X(x)\,dx$

Μπορεί να έχει και αλλαγή μεταβλητών.)

2) α. Προπτ = 2 Μεταπτ

25 % από Μεταπτ. $\xrightarrow{\text{μένουν}}$ Φοιτ. Εστ.

10 % από Προπτ. $\xrightarrow{\text{μένουν}}$ Φοιτ. Εστ.

(i) P(προπτ και μένει σε Φ.Ε)

(ii) Αν ένας φοιτητής που μένει σε Φ.Ε επιλεγεί στην τύχη ποια η πιθανότητα να είναι μεταπτ.?

β. Νόμισμα ρίχνεται 2 φορές.

A = {το πολύ μια Κ στις 2 ρίψεις}

B = {μια Κ και μια Γ στις 2 ρίψεις}

Λύση

α. Προπτ = 2 Μεταπτ.

$$\left.\begin{array}{l} P(\Pi) = 2P(M) \\ P(\Pi) + P(M) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(\Pi) = \frac{2}{3} \\ P(M) = \frac{1}{3} \end{array}$$

$P(\Phi/M) = 0{,}25$

$P(\Phi/\Pi) = 0{,}1$

(i) $P(\Pi \cap \Phi)$

$$0{,}1 = P(\Phi/\Pi) = \frac{P(\Phi \cap \Pi)}{P(\Pi)} \Rightarrow P(\Pi \cap \Phi) = 0{,}1\,P(\Pi) = 0{,}067$$

(ii) $P(M/\Phi) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(\Phi/M)P(M)}{P(\Phi)} = \dfrac{P(\Phi/M)P(M)}{P(\Phi/M)P(\Pi)+P(\Phi/M)P(M)} =$

$P(\Phi)$ ← υπολογίζω με Θ.Ο.Π

$= 0{,}553$

β. $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$?

$S = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$

$A = \{K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$

$B = \{K\Gamma, \Gamma K\} \rightarrow P(B) = \frac{2}{4}$

$A\cap B = \{K\Gamma, \Gamma K\} \rightarrow P(A\cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Παρατηρώ ότι $P(A\cap B) = \frac{1}{2} \neq \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = P(A)\cdot P(B)$

Άρα A, B όχι ανεξάρτητα ή A, B εξαρτημένα.

3) α. 10 βιβλία διακεκριμένα

P(3 συγκεκριμένα το ένα δίπλα στο άλλο)

β. 12 ασκήσεις $\xrightarrow{\text{είπε}}$ 6 θα είναι θέματα

Μαρία $\xrightarrow{\text{γνωρίζει}}$ 8 ασκήσεις από τις 12

P(να λύσει σωστά 4 ή περισσότερα θέματα)

Λύση

α. $\frac{3! \times 8!}{10!}$

β. $\frac{\binom{8}{4}\times\binom{4}{2}+\binom{8}{5}\binom{4}{1}+\binom{8}{6}\binom{4}{0}}{\binom{12}{6}}$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
Ασκήσεις Επανάληψης
Ακαδημαϊκό Έτος 2015-2016

<u>Άσκηση 1:</u> Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}, \ \alpha > 0.$$

α) Να υπολογισθεί η σταθερά α και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_X της X.

β) Να υπολογισθούν με τη χρήση της $f_X(x)$ η πιθανότητα $P(X>0)$ και με τη χρήση της F_X η πιθανότητα $P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right)$. Να υπολογισθεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P\left(X > -\frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right)$ και να εξετασθεί αν είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα $A = \{X > 0\}$ και $B = \left\{-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right\}$. γ) Να υπολογισθεί η $E(X)$.

<u>Άσκηση 2:</u> α) Σε ένα Πανεπιστήμιο οι προπτυχιακοί φοιτητές είναι διπλάσιοι από τους μεταπτυχιακούς φοιτητές. Επίσης, 25% από τους μεταπτυχιακούς φοιτητές μένουν στις φοιτητικές εστίες, ενώ 10% των προπτυχιακών φοιτητών μένουν στις φοιτητικές εστίες. i) Αν ένας από τους φοιτητές αυτούς επιλεγεί στην τύχη, ποια η πιθανότητα να είναι προπτυχιακός φοιτητής και να μένει σε φοιτητική εστία; ii) Αν ένας φοιτητής που μένει σε φοιτητική εστία επιλεγεί στην τύχη, ποια η πιθανότητα να είναι μεταπτυχιακός φοιτητής;

β) Ένα νόμισμα ρίχνεται δύο φορές. Έστω το ενδεχόμενο Α «το πολύ μια Κεφαλή στις δύο ρίψεις» και έστω Β το ενδεχόμενο «μια Κεφαλή και μια γράμματα στις δύο ρίψεις». Είναι τα Α και Β ανεξάρτητα ενδεχόμενα;

<u>Άσκηση 3:</u> α) Δέκα βιβλία τοποθετούνται στο ίδιο ράφι μιας βιβλιοθήκης. Ποιά η πιθανότητα τρία συγκεκριμένα από αυτά να τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο;

β) Ένας μαθηματικός έδωσε στους μαθητές του 12 ασκήσεις και τους είπε ότι 6 από αυτές θα επιλεγούν στην τύχη και θα είναι θέματα στις εξετάσεις. Η Μαρία γνωρίζει τη λύση 8 από τις ασκήσεις αυτές και δεν μπορεί να λύσει τις υπόλοιπες 4. Ποιά η πιθανότητα να λύσει σωστά 4 ή περισσότερα θέματα στις εξετάσεις;

<u>Άσκηση 4:</u> α) Ένα νόμισμα ρίχνεται 10 φορές και στις 6 από αυτές εμφανίζεται Κεφαλή. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός Γραμμάτων σε 5 ρίψεις του νομίσματος αυτού;

β) Φοιτητές επισκέπτονται το γραφείο ενός καθηγητή τους, την προηγουμένη των εξετάσεων, για ερωτήσεις και απορίες. Έστω ότι επισκέπτονται το γραφείο 6 φοιτητές την ώρα, κατά μέσο όρο. i) Ποια η πιθανότητα να επισκεφθούν το γραφείο 3 φοιτητές μεταξύ 10:00 και 10:45 το πρωί. ii) Δεδομένου ότι ένας φοιτητής μπαίνει στο γραφείο για ερωτήσεις, ποια η πιθανότητα ο αμέσως επόμενος να περιμένει μεταξύ 5 και 10 λεπτών;

<u>Άσκηση 5:</u> α) Το βάρος σε κιλά κιβωτίων στα οποία συσκευάζονται παιδικές τροφές μπορεί να μοντελοποιηθεί από την κανονική κατανομή $N(5,16)$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες ένα κιβώτιο που επιλέγεται στην τύχη: i) Να ζυγίζει μεταξύ 1 και 10 κιλών, και ii) να ζυγίζει περισσότερο από 9 κιλά.

β) Αν εξεταστεί το βάρος τεσσάρων από τα κιβώτια αυτά, ποια η πιθανότητα και τα τέσσερα να έχουν βάρος μεγαλύτερο από εννιά κιλά;

γ) Αν X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή και υπάρχει η $E(X)$, να δειχθεί ότι $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$, για σταθερές α και β.